Вестник Тюменского государственного университета.
2014. № 7. Физико-математические науки. Информатика. 234-241

© Д.А. ЧЕРЕНЦОВ[1], С.П. ПИРОГОВ[2], С.М. ДОРОФЕЕВ[3]
[1,2]Тюменский государственный нефтегазовый университет
[3]Тюменский государственный университет
Cherentsovda@bk.ru

УДК 622.691.4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАНОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРУЖИНЫ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

MATHEMATICAL MODEL OF MANOMETRIC SPRING IN A VISCOUS MEDIUM

АННОТАЦИЯ. Представлена математическая модель манометрической трубчатой пружины, находящейся в жидкости, на основании которой можно рассчитать параметры затухающих колебаний данных пружин.

Для повышения точности измерения изменяют геометрические параметры манометрических трубчатых пружин (МТП), повышая их вибростойкость. В качестве альтернативы возможно погружать МТП в жидкость, амортизируя колебания. Демпфирование колебаний зависит от коэффициента затухания и частоты затухающих колебаний, в связи с чем и возникает необходимость в их определении.

Динамическая модель МТП представлена в виде тонкостенного изогнутого стержня, совершающего колебания в плоскости кривизны центральной оси. Сопротивление жидкости представлено в виде распределенной нагрузки. Уравнения колебаний элемента получены в соответствии с принципом Даламбера в проекциях на нормаль и на касательную.

Граничные условия: в сечении жесткого закрепления пружины касательное, нормальное перемещение и угол поворота поперечного сечения трубки равны нулю. На противоположном конце изгибающий момент, растягивающие усилия и поперечная сила обращаются в нуль.

Для решения полученных уравнений применяется метод Бубнова-Галеркина.

SUMMARY. A mathematical model of the manometric tube spring located in the fluid is presented in the article. The model allows to calculate the parameters of damped oscillations of the springs. To improve the accuracy of measurement, the geometric parameters of manometric tube springs are changed by raising their vibration fatigue. Alternatively, it is possible to immerse manometric tube springs into the liquid damping vibrations. Vibration damping depends on the damping coefficient and the frequency of damping vibrations. Thus, there is a need to determine them. A dynamic model of the manometric tube spring is presented in the form of thin-walled curved rod which oscillates in the plane of curvature of the central axis. Fluid resistance is represented as a distributed load. Element wave equations are obtained in accordance with the principle of d'Alamber in the projections on the normal and tangential. Boundary conditions: tangent and normal displacements, a rotation angle of the tube cross section in the section of rigid spring fixing is zero. At the opposite end, the bending moment, tensile forces and shear force go to zero. Bubnov-Galerkin method is used to solve the obtained equations.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Параметры затухания, манометрическая трубчатая пружина, математическая модель, метод Бубнова-Галеркина.

KEY WORDS. Damping parameters, manometric tube spring, mathematical model, Bubnov-Galerkin method.

При строительстве и ликвидации аварий на трубопроводах для контроля давления используются манометры. Наиболее часто применение деформационных манометрических приборов остается безальтернативным [1].

Колебательные движения, вызванные вибрацией устройств, на которые они установлены или неравномерный расход перекачиваемой среды (пульсация рабочей среды) затрудняют точную регистрацию измеряемой величины.

Решением может стать помещение упругого элемента прибора — манометрической трубчатой пружины в жидкую среду рис. 1.

Рис. 1. МТП

Такие приборы выпускаются серийно, однако методика их расчета отсутствует, поэтому для оптимального проектирования необходимо описать движение упругого элемента в жидкой среде.

На рис. 2 показан бесконечно малый элемент, вырезанный из кривого стержня.

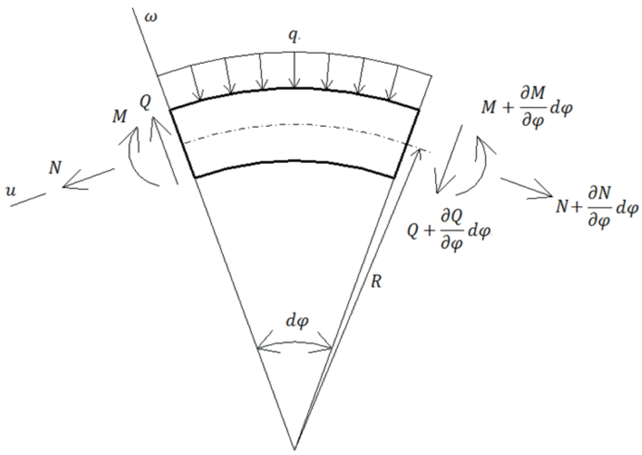

Рис. 2. Элемент стержня

Сила сопротивления движению в жидкости — распределенная нагрузка q. Будем считать, что сила сопротивления движению пружины пропорциональна ее скоростям: q = βv.

В соответствии с принципом Даламбера [2] получены уравнения движения элемента $Rd\varphi$ трубки, в полярных координатах:

$$dm\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Q - Qcos\,d\varphi - \frac{\partial Q}{\partial\varphi}d\varphi cos\,d\varphi - N\sin d\varphi - \frac{\partial N}{\partial\varphi}d\varphi\sin d\varphi - qRd\varphi\cos\frac{d\varphi}{2},$$

$$dm\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = N - N\cos d\varphi - \frac{\partial N}{\partial\varphi}d\varphi\cos d\varphi + Q\sin d\varphi + \frac{\partial Q}{\partial\varphi}d\varphi sin\,d\varphi + qRd\varphi\sin\frac{d\varphi}{2}.$$

Разложим функции косинуса и синуса в степенной ряд и, пренебрегая членами, содержащими $d\varphi d\varphi$, ввиду их малости, получим:

$$\rho_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial Q}{R\partial\varphi} + \frac{N}{R} = 0,$$

$$\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{Q}{R} + \frac{\partial N}{R\partial\varphi} = 0.$$

где N — продольная сила, $N = D\varepsilon$;

D — жесткость сечения на растяжение, $D = \frac{ES(\varphi)}{(1-\mu^2)}$;

ε — Удлинение продольной оси элемента, $\varepsilon = \frac{du}{Rd\varphi} + \frac{w}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{du}{d\varphi} + w\right)$;

$S(\varphi)$ — площадь поперечного сечения трубки, зависящая от угловой координаты φ этого сечения;

μ — коэффициент Пуассона;

$\frac{dM}{Rd\varphi} = Q$ — поперечная сила;

m_0 — масса единицы длины трубки (масса поперечного сечения с координатой φ).

Угол поворота поперечного сечения трубки в процессе движения определяется формулой:

$$\theta = \frac{u}{R} - \frac{dw}{Rd\varphi},$$

где R — радиус кривизны центральной оси;

u — продольное смещение элемента;

w — поперечное смещение элемента.

Изменение кривизны χ центральной оси равно производной от угла поворота ζ по длине дуги:

$$\chi = \frac{d\theta}{Rd\varphi} = \frac{1}{R^2}\left(\frac{du}{d\varphi} - \frac{d^2w}{d\varphi^2}\right).$$

Изгибающий момент в сечении трубки:

$$M_u = -B\chi = -\frac{B}{R^2}\left(\frac{du}{d\varphi} - \frac{d^2w}{d\varphi^2}\right),$$

где B — жесткость трубки на изгиб;

Для сечения манометрической пружины [3]:

$$B(\varphi) = \frac{EJ(\varphi)K_k(\varphi)}{(1-\mu^2)},$$

где E — модуль упругости материала трубки;

$J(\varphi)$ — момент инерции сечения, зависящий от угловой координаты сечения φ;

$K_k(\varphi)$ — коэффициент Кармана, зависящий от угловой координаты сечения φ;

Подставив в систему приведенные выше значения, получим уравнения в перемещениях u и w:

$$\rho_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(\frac{EJ(\varphi)K_k(\varphi)}{(1-\mu^2)R^4}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right)\right) + \frac{ES(\varphi)}{(1-\mu^2)R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi} + w\right) = 0,$$

$$\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{EJ(\varphi)K_k(\varphi)}{(1-\mu^2)R^4}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{ES(\varphi)}{(1-\mu^2)R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi} + w\right)\right) = 0.$$

Представим систему уравнений в следующем виде:

$$\begin{gathered}\rho_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left\{G\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right)\right\} + \left\{H\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi} + w\right)\right\} = 0,\\ \rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{G\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{H\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi} + w\right)\right\} = 0.\end{gathered} \qquad (*)$$

где $G = \frac{EJ(\varphi)K_k(\varphi)}{(1-\mu^2)R^4}$; $H = \frac{ES(\varphi)}{(1-\mu^2)R^2}$; $m_0 = \rho S(\varphi)$.

Главные граничные условия при φ=0: $u(0) = 0; \omega(0) = 0; \frac{\partial w}{\partial\varphi}(0) = 0.$

Естественные граничные условия при (φ=γ): $M(\gamma) = 0$; $N(\gamma) = 0$; $Q(\gamma) = 0$;

или в перемещениях:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}(\gamma) - \frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}(\gamma)\right) = 0,\ \left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}(\gamma) + w(\gamma)\right) = 0,\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}(\gamma) - \frac{\partial^3 w}{\partial\varphi^3}(\gamma)\right) = 0\ .$$

Для решения системы (*) применяется метод Бубнова-Галеркина [4].

Искомые перемещения представим в виде:

$$u=\psi_1(\varphi)a_1(t)+\psi_2(\varphi)a_2(t)+\cdots\psi_n(\varphi)a_n(t)=\sum_{i=1}^{n}\psi_n(\varphi)a_n(t)$$

$$w=\zeta_1(\varphi)b_1(t)+\zeta_2(\varphi)b_2(t)+\cdots\zeta_n(\varphi)b_n(t)=\sum_{i=1}^{n}\zeta_n(\varphi)b_n(t)$$

где $a_1,a_2\ldots a_n,b_1,b_2\ldots b_n$ — функции переменной t;

$a_1,a_2\ldots a_n,b_1,b_2\ldots b_n$ — базисные функции переменной φ.

С учетом этого получим:

$$m_0\left(\sum_{i=1}^{n}\zeta_n(\varphi)\ddot{b}_n(t)\right)+\beta\left(\sum_{i=1}^{n}\zeta_n(\varphi)\dot{b}_n(t)\right)$$
$$-\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left\{G\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sum_{i=1}^{n}\psi_n(\varphi)a_n(t)\right)-\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\zeta_n(\varphi)b_n(t)\right)\right)\right\}$$
$$+\left\{H\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sum_{i=1}^{n}\psi_n(\varphi)a_n(t)\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}\zeta_n(\varphi)b_n(t)\right)\right)\right\}=R(x)<>0,$$

$$m_0\left(\sum_{i=1}^{n}\psi_n(\varphi)\ddot{a}_n(t)\right)-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{G\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sum_{i=1}^{n}\psi_n(\varphi)a_n(t)\right)-\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\zeta_n(\varphi)b_n(t)\right)\right)\right\}$$
$$+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{H\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sum_{i=1}^{n}\psi_n(\varphi)a_n(t)\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}\zeta_n(\varphi)b_n(t)\right)\right)\right\}=R(x)<>0.$$

В соответствии с методом Бубнова-Галеркина [5] потребуем выполнение условий ортогональности невязки R(x) системе базисных функций ψ_i и ζ_j.

Условия ортогональности запишется в следующем виде:

$$m_0\int_0^{\gamma}\left(\sum_{i=1}^{n}\zeta_n(\varphi)\ddot{b}_n(t)\right)\zeta_j d\varphi+\beta\int_0^{\gamma}\left(\sum_{i=1}^{n}\zeta_n(\varphi)\dot{b}_n(t)\right)\zeta_j d\varphi$$
$$-G\int_0^{\gamma}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sum_{i=1}^{n}\psi_n(\varphi)a_n(t)\right)-\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\zeta_n(\varphi)b_n(t)\right)\right)\right]\zeta_j d\varphi$$
$$+H\int_0^{\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sum_{i=1}^{n}\psi_n(\varphi)a_n(t)\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}\zeta_n(\varphi)b_n(t)\right)\right)\zeta_j d\varphi=0,$$

$$m_0 \int_0^{\gamma} \left(\sum_{i=1}^{n} \psi_n(\varphi) \ddot{a}_n(t) \right) \psi_i \, d\varphi$$

$$+ G \int_0^{\gamma} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sum_{i=1}^{n} \psi_n(\varphi) a_n(t) \right) - \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\sum_{i=1}^{n} \zeta_n(\varphi) b_n(t) \right) \right) \psi_i d\varphi$$

$$+ H \int_0^{\gamma} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sum_{i=1}^{n} \psi_n(\varphi) a_n(t) \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \zeta_n(\varphi) b_n(t) \right) \right) \psi_i d\varphi = 0.$$

Проинтегрируем данную систему по частям, при этом часть слагаемых в силу естественных граничных условий будет равна нулю, понизится также порядок производных. В результате получим:

$$m_0 \int_0^{\gamma} \left(\sum_{i=1}^{n} \zeta_n(\varphi) \ddot{b}_n(t) \right) \zeta_j d\varphi + \beta \int_0^{\gamma} \left(\sum_{i=1}^{n} \zeta_n(\varphi) \dot{b}_n(t) \right) \zeta_j d\varphi$$

$$- G \int_0^{\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sum_{i=1}^{n} \psi_n(\varphi) a_n(t) \right) - \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\sum_{i=1}^{n} \zeta_n(\varphi) b_n(t) \right) \right) \frac{\partial^2 \zeta_j}{\partial \varphi^2} d\varphi$$

$$+ H \int_0^{\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sum_{i=1}^{n} \psi_n(\varphi) a_n(t) \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \zeta_n(\varphi) b_n(t) \right) \right) \zeta_j d\varphi = 0,$$

$$m_0 \int_0^{\gamma} \left(\sum_{i=1}^{n} \psi_n(\varphi) \ddot{a}_n(t) \right) \psi_i \, d\varphi$$

$$- G \int_0^{\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sum_{i=1}^{n} \psi_n(\varphi) a_n(t) \right) - \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\sum_{i=1}^{n} \zeta_n(\varphi) b_n(t) \right) \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$- H \int_0^{\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sum_{i=1}^{n} \psi_n(\varphi) a_n(t) \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \zeta_n(\varphi) b_n(t) \right) \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial \varphi} d\varphi = 0.$$

Данные уравнения являются системой 2n обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами второго порядка относительно неизвестных функций $a_1(t), \dots a_n(t), b_1(t), \dots b_n(t)$.

Базисные функции, удовлетворяющие главным граничным условиям:

$$\psi_i(\varphi) = \varphi^i; \quad i = 1, \dots, n$$
$$\zeta_j(\varphi) = \varphi^{j+1}; \quad j = 1, \dots, n$$

Частное решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеет вид [6], [7]:

$$a_n = C_n e^{rt} \qquad b_n = F_n e^{rt}$$

где C_n и F_n — постоянные.

Первая и вторая производная равны:

$$\dot{a}_n = rC_n e^{rt} \qquad \dot{b}_n = rF_n e^{rt}$$

$$\ddot{a}_n = r^2 C_n e^{rt} \qquad \ddot{b}_n = r^2 F_n e^{rt}$$

Для того чтобы система имела отличное от нуля решение, ее определитель должен равняться нулю [8].

Получим характеристическое уравнение из условия равенства определителя нулю, решение данного уравнения возможно методом Феррари [9].

Если вязкое сопротивление мало, то могут происходить колебания, при этом корни окажутся комплексными с отрицательными действительными частями [10].

$$r_j = -n_j + ik_j$$
$$\overline{r_j} = -n_j - ik_j$$

где n_j — коэффициент затухания; k_j — частота затухающих колебаний; $\overline{r_j}$ — число, сопряженное с соответствующими комплексными числами.

Предложенная модель позволяет определить параметры затухающих колебаний, зависящие как от свойств жидкости, так и от геометрических параметров пружины. В дальнейшем предлагается провести сравнение с результатами экспериментальных исследований колебаний манометрической пружины в жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пирогов С.П. Манометрические трубчатые пружины. СПБ: Недра, 2009. 276 с.
2. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1965.
3. Чуба А.Ю. Расчет собственных частот колебаний манометрических трубчатых пружин: дисс. ... канд. техн. наук. Тюмень, 2007. 137 с.
4. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 200 с.
5. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 352 с.
6. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 480 с.
7. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
8. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1957. 420 с.
9. Курош А.Г.. Курс высшей алгебры. 11-е изд.. М., 1975.
10. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. BHV 2003. 254 с.

REFERENCES

1. Pirogov, S.P. *Manometricheskie trubchatye pruzhiny* [Manometric tube springs]. St-Petersburg, 2009. 276 p. (in Russian).
2. Beljaev, N.M. *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]. Moscow: Nauka, 1965. (in Russian).
3. Chuba, A.Ju. *Raschet sobstvennyh chastot kolebanij manometricheskih trubchatyh pruzhin* (kand. diss.) [Calculation of oscillation frequencies of manometric tube springs (Cand. Sci. (Tech.) Diss.)]. Tyumen, 2007. 137 p. (in Russian).

4. Kalitkin, N.N. *Chislennye metody* [Numerical methods]. Moscow: Nauka, 1978. 200 p. (in Russian).

5. Fletcher, K. *Chislennye metody na osnove metoda Galerkina* [Computations Galerkin Methods with 107 figures]. Moscow, 1988. 352 p. (in Russian).

6. Biderman, V.L. *Teorija mehanicheskih kolebanij* [Theory of mechanical vibrations]. Moscow, 1980. 480 p. (in Russian).

7. Timoshenko, S.P. *Kolebanija v inzhenernom dele* [Engineering vibrations]. Moscow: Nauka, 1967. 444 p. (in Russian).

8. Smirnov, V.I. *Kurs vysshej matematiki. T. 2* [A course of higher mathematics. Vol. 2]. Moscow: Nauka, 1957. 420 p. (in Russian).

9. Kurosh, A.G. *Kurs vysshej algebry. 11-e izd.* [A course of higher algebra. 11^{th} ed.]. Moscow: Nauka, 1975. (in Russian).

10. Jablonskij, A.A., Norejko, S.S. *Kurs teorii kolebanij* [A course of the oscillations theory]. St-Peterburg, 2003. 254 p. (in Russian).

Авторы публикации

Черенцов Дмитрий Андреевич — ассистент кафедры «Транспорт углеводородных ресурсов» Тюменского государственного нефтегазового университета

Пирогов Сергей Петрович — профессор кафедры «Прикладная механика» Тюменского государственного нефтегазового университета, доктор технических наук

Дорофеев Сергей Михайлович — доцент кафедры математики и информатики Тюменского государственного университета, кандидат физико-математических наук

Authors of the publication

Dmitry A. Cherentsov — Post-graduate student, Assistant Lecturer, Department of Hydrocarbons Transport, Tyumen State Oil and Gas University

Sergey P. Pirogov — Dr. Sci. (Tech.), Professor, Department of Applied Mechanics, Tyumen State Oil and Gas University

Sergey M. Dorofeyev — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Mathematics and Computer Sciences, Tyumen State University